

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EN EL AULA



“El túnel del tiempo”: impresión 3D aplicada al Arte y Matemáticas



I.E.S. Castillo de la Yedra (Cazorla, Jaén) (Cód.: 23001111)

Proyecto desarrollado por: María Dolores Fuentes Ortuño, Javier Sevilla Martínez y el alumnado del Centro de 1º a 4º de ESO.

ÍNDICE

1 – INTRODUCCIÓN	3
2 – EXPERIENCIAS PREVIAS	4
3 – JUSTIFICACIÓN PEDAGÓGICA DEL PROYECTO	5
3.1 – Mejora del rendimiento escolar	6
3.2 – Atención a la diversidad	6
4 – OBJETIVOS DEL PROYECTO	7
5 – IMPORTANCIA DE LA INTERDISCIPLINARIDAD	8
6 – DESARROLLO METODOLÓGICO Y ACTIVIDADES PLANTEADAS.....	9
7 – ANEXOS	11
7.1 – Actividad tipo: La Alhambra.....	11
7.2 – Artículo científico.....	14

1 – INTRODUCCIÓN

A pocos kilómetros de nuestra ciudad, en el término municipal de Quesada, se encuentran los restos de una villa romana: la Villa romana de Bruñel, excavada entre los años 50 y 70 del siglo pasado. Tanto en la misma villa como en el Museo Arqueológico Nacional, se encuentran diversos mosaicos. La inquietud o necesidad de recubrir el espacio (plano en este caso) es un denominador común de la cultura humana desde las primeras civilizaciones. Las técnicas y la tecnología han variado con el tiempo, pero permanecen inalterables en su esencia. Por ejemplo, el nivel alcanzado por los artistas nazaríes en los mosaicos de la Alhambra, sin menospreciar la colaboración sefardí, aún nos asombra.

Hace muchos años, tantos como los que nos separan de la edad de nuestros alumnos, los que ahora componemos este claustro pisábamos las aulas y gastábamos pupitre... En aquellos días, bastante alejados del corpus didáctico de la actualidad, el modelo lección magistral (no siempre brillante) más examen era la única vía metodológica generalizada. Sin embargo, había profesores que, sin abandonar el estatus metodológico canónico comenzaban a introducir “morcillas” aperturistas. El uso de “chascarrillos” o de anécdotas, más o menos amenas, comenzaba a descargar el corpus lectivo y a acercarlo a la realidad del día a día.

La posibilidad de modelizar, de manipular, entonces inimaginable, se convierte, hoy en día, en el motivo básico de nuestra práctica. El modelo Concepto – Aplicación de nuestra infancia está alejado de todo concepto racional y, sobre todo, del método científico. La mente humana ensaya, toca y, después, teoriza. También ese “tocar” nos permite asimilar los conceptos heredados de nuestro patrimonio intelectual. Además, nos permite un trabajo con dos objetivos básicos. **INVESTIGAR y PROFUNDIZAR**. La absurda, antigua y no siempre agradable separación CIENCIAS – LETRAS es, literalmente, la fractura de un hueso largo; el conocimiento humano.

El **Arte** recoge un componente geométrico aplicado, pero, sobre todo, investigado y creado para la obra artística. Los trabajos de perspectiva de Leon Battista Alberti o la aplicación en las pinturas de Leonardo da Vinci no se crearon a través de la casualidad. “La última cena” de Dalí es una plasmación de espacios proyectivos proyectados. La Alhambra y sus alicatados son estudios exhaustivos e innovadores de los grupos de isometrías. La teselación del plano, un ejercicio de abstracción geométrica máximo, acarrea incluso conceptos religiosos como el de la igualdad y desnudez ante la obra común.

La **Geometría**, en sí, es un motor de ordenación y eficiencia su aplicación milenaria a la ordenación agrícola y ornamental, en jardines, ha corrido paralela a su propia evolución científico-tecnológica. Las geometrías no euclídeas, conceptos fractales o métodos estadísticos en su diseño cambian el concepto de uso y eficiencia del agua. Y, sobre todo y lo que nos ocupa, todo es manipulable y reproducible a una escala óptima para observar y aventurar sobre el modelo.

Pero ¿qué es una **teselación**? En palabras simples, una manera de ocupar todo el plano mediante pequeñas piezas, teselas, que encajan perfectamente entre sí. El número de téseras diferentes debe ser lo más reducido posible incluso, si es posible, del mismo

tipo. Es decir, un motivo o patrón se repite mediante giros, traslaciones o simetrías o la composición de los tres movimientos anteriores. El mundo griego, en su búsqueda de la simplicidad, trabajó teselas regulares como una proyección natural de los sólidos pitagóricos. Más recientemente y mucho más académicos son los estudios sobre las teselaciones pentagonales. Siendo el denominado “Mosaico del Cairo”, frecuente en los pavimentos de Granada, su expresión más popular.

Y ahí es precisamente donde conducimos la experiencia de estas notas. Teselar el plano con pentágonos como fin y progresión de las relaciones regulares clásicas y de los mosaicos nazaríes. Además, la posibilidad de manipular las teselas supone el verdadero valor de la experiencia, al convertir a nuestros alumnos en MONITORES y EXPOSITORES de conceptos geométricos elevados y a los PARTICIPANTES en actores activos de la experiencia.

2 – EXPERIENCIAS PREVIAS

Hace cinco años decidimos “sacar” a nuestros alumnos para que viesan MATEMÁTICAS en lo que antes era, el mejor de los casos, un lugar pintoresco. El patrimonio renacentista de nuestra comarca, la herencia y vecindad nazarí y la disposición de los compañeros de Matemáticas, Tecnología y Dibujo eran una obligación de trabajo. En la última presencia “física” en la semana de Sevilla el Prof. Dr. D. Álvaro Martínez Sevilla del departamento de Álgebra de la UGR nos propuso continuar nuestra línea de trabajo, pero incorporando, además, las teselaciones pentagonales.

En la normativa vigente, a nivel nacional (incluso en la nueva norma orgánica que, si se produce la aprobación del Congreso, sustituirá el marco estatal actual) así como en la normativa autonómica andaluza, podemos destacar y adaptar en su redacción cuatro objetivos marco.

- 1.- Igualdad entre niños y niñas (fomentando la Ciencia como un trabajo próximo y ajeno a clichés cinematográficos de científicos con pelo blanco y aspecto de anciano despistado).
- 2.- Desarrollo personal fomentando la capacidad de dirigir el propio conocimiento, en base a los intereses próximos de su realidad.
- 3- Defensa y divulgación de su Patrimonio cultural (Trabando en ambientes próximos y cercanos a su realidad diaria).
- 4.- Fomento de su autonomía y de su capacidad de toma crítica de decisiones.

Aunque el proyecto no aporta ninguna idea novedosa, en sí, sí proponemos realizar una serie de actividades novedosas y motivadoras para el alumnado y con el alumnado. Ya hemos comprobado a través de la participación en ediciones pasadas del programa “Andalucía Profundiza” que este tipo de actividades gusta al alumnado cuando participa como educador y cuando participa como educando, a través del planteamiento de diferentes actividades con los materiales creados.

Este proyecto cuenta con aspectos novedosos, el método de trabajo que utilizamos, es la primera vez que se hace en el I.E.S. “Castillo de la Yedra”, aunque ya hemos utilizado esta metodología en el programa “Andalucía Profundiza”. No tenemos constancia de que haya centros de la zona que utilicen este método.

3 – JUSTIFICACIÓN PEDAGÓGICA DEL PROYECTO

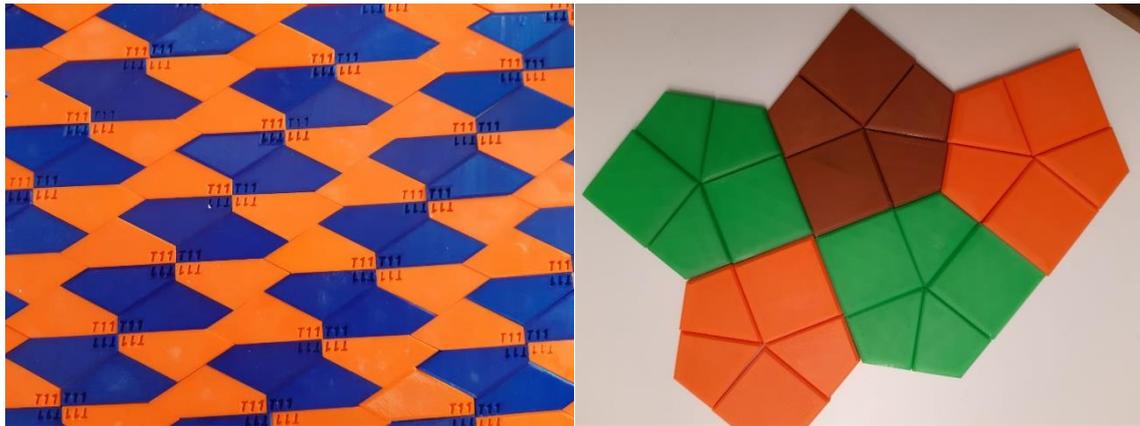
Este proyecto quiere llevar a cabo experiencias previas utilizadas en el aula, no solo en nuestro Centro de Secundaria, sino también introducir a Centros de Primaria de la localidad (Cazorla, Jaén) en los que también se ha llevado a cabo este proyecto de manera experimental, utilizando métodos en los que el alumnado es el transmisor de contenidos y conocimiento adquirido a sus compañeros.

Nuestros alumnos necesitan familiarizarse con diversos conceptos y herramientas matemáticas, pero debemos evitar, en la medida de lo posible, el uso y abuso del formalismo académico. Una definición nos ayuda en varios sentidos: primero, acerca la matemática académica del mundo de las ideas a una herramienta manipulativa y maleable. Y segundo, invita, al menos en algunos, al despertar de la inquietud por avanzar y profundizar en esa idea tan prosaica (inicia el método científico).

Necesitaremos trabajar con los movimientos en el plano simetrías, traslaciones y giros de forma que su uso no conlleve, necesariamente, su formalización. De lo anterior se deduce la necesidad de un dibujo cuidado y muy exacto; sin desdeñar a nuestros añorados “rotrings”, la aplicación Geogebra nos aportará nuestras “regla y compas” clásicos.

Utilizaremos los conocimientos matemáticos para crear elementos artísticos pasando por el diseño e impresión de las diferentes piezas con tecnología 3D. El uso interdisciplinar de varias materias (Geografía e Historia, Matemáticas y Tecnología...), hace que se le vea un uso práctico, artístico y atractivo de las Matemáticas mejorando de esta forma, de forma clara y fehaciente, los rendimientos escolares, dado que la motivación por parte del alumnado puede venir desde cualquier ámbito de este proyecto: matemático, tecnológico y artístico.

Por otro lado, en la Orden de 15 de enero de 2021 se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado incidiendo en la necesidad de integrar nuevos modelos de trabajo entre el profesorado **PRIORIZANDO** los equipos multidisciplinares en pos de un objetivo común. Además, tenemos la **NECESIDAD** de fomentar el estudio de las **CIENCIAS** (integradas en un entorno sociocultural y en nada ajeno a las manifestaciones artísticas) y la exigencia de esta sociedad igualitaria para que la Ciencia abandone los tópicos.



3.1 – Mejora del rendimiento escolar

A través de una propuesta realizada años antes (ver Punto 2), con esta propuesta, incorporamos esa línea de trabajo en el Centro y adquirimos una impresora 3D, combinándola con el uso de otra disponible en el Centro. Las participaciones anuales en la Semana de la Ciencia de Úbeda, junto con la invitación y asistencia a la Feria de la Ciencia de Sevilla cambiaron el enfoque de nuestro trabajo. Este salto nos hizo pensar en la necesidad de convertir en divulgadores a nuestro alumnado y dotarlos de material expositivo que partiera de dos premisas: trabajo comprensible y desarrollable, así como tareas manipulables y fácilmente construibles.

Tras estas experiencias realizadas anteriormente, pudimos apreciar como el alumnado mejoraba sus rendimientos en clase ya que teníamos varios campos para aumentar su motivación:

- El uso de las Matemáticas para una aplicación práctica ya sea en el campo del arte o de la arquitectura.
- El uso del diseño e impresión en 3D, trabajadas desde la materia de Tecnología para realizar las piezas necesarias para la realización de los mosaicos y las teselaciones.
- La utilización artística de elementos matemáticos y tecnológicos.
- La necesidad como alumno-monitor de responder a preguntas de los asistentes a los talleres que se realizaron.

3.2 – Atención a la diversidad

Nuestro proyecto, al abarcar alumnado proveniente desde la Educación Primaria hasta 4º de la ESO, abarca varios niveles cognitivos.

Por otro lado, dado que nos encontraremos con alumnado diverso, hay actividades que van desde Primaria hasta Secundaria. Según el nivel del alumnado asistente a los diferentes talleres, se le asignarán tareas de Primaria (si necesitan material adaptado) o de nivel de Secundaria, en caso de encontrarnos con alumnado de altas capacidades. Algunos ejemplos de medidas podrían ser:

- Creación de agrupamientos de alumnado heterogéneos.
- Diversificación de grupos en base a las características de los alumnos para crear, por ejemplo: grupos de iniciación a la lengua para alumnado extranjero.
- Establecer un horario flexible.
- La adaptación de los pilares educativos de cada centro basándose en su realidad y contexto.
- Integrar los resultados obtenidos en el programa en su barrio o entorno.
- Promulgación de actuaciones que divulguen un clima inclusivo en el centro.

4 – OBJETIVOS DEL PROYECTO

Los objetivos de este proyecto, de acuerdo a lo expuesto en el apartado anterior, consisten en dar a conocer brevemente, con un ejemplo al alcance de los alumnos:

- Establecer relaciones entre Matemáticas, Historia y Arte, así como una comprensión histórica de los diferentes elementos desarrollados.
- Formación del alumnado como monitores científicos, para incentivar y mejorar sus habilidades sociales y conocimientos adquiridos.
- Fomentar y desarrollar relaciones sociales entre alumnado de diferentes edades, así como integrar a alumnado en tareas cooperativas y colaborativas.
- Estudiar de la geometría a través de la manifestación artística. Conectando el hecho geométrico con su entorno e interpretando el porqué de su uso en ese contexto determinado. El lenguaje de las proporciones.
- Trabajar sobre nuestro patrimonio comarcal (Renacimiento) y regional (La Alhambra). La proporción áurea y la proporción cordobesa. Puesta en valor y proyectos de trabajo que proyecten y den a conocer su importancia.
- Estudiar el contexto histórico y social. Con especial atención a los medios constructivos de la época.
- Trabajar fuera, también, de las aulas con un modelo integrador y de corresponsabilidad entre alumnos y profesores. **IMPLICACIÓN** de las familias como ayuda y trabajo necesario.
- Abrir nuevas opciones de ocio y descanso. El placer de los paseos con ojo crítico. Entender el por qué de lo que vemos.
- Proyectar el trabajo como una opción más (podría ser complementaria en las visitas monumentales) de la ya rica oferta turística de la comarca.
- Conocer el montaje de una impresora 3D y adquirir los fundamentos tecnológicos necesarios para desenvolverse con soltura en el ámbito de la impresión 3D.
- Obtener una visión general del abanico de tecnologías de impresión 3D existentes.
- Conocer la estructura y componentes de una impresora 3D, y los detalles de su funcionamiento.
- Conocer las alternativas de software para el control de impresoras 3D y sus funcionalidades básicas (CURA, Slicer).

Todo lo anterior sólo es factible con un uso decidido y eficiente de los medios de los que disponemos. TICs, talleres de tecnología, Impresión 3D, etc.

5 – IMPORTANCIA DE LA INTERDISCIPLINARIDAD

La irrupción de la tecnología de impresión 3D presenta el reto de conocer cómo estos medios tecnológicos pueden dar soporte a actividades de enseñanza-aprendizaje, utilizados como vía para adquirir conocimiento y desarrollar capacidades organizativas y de creación, así como el de la cultura “maker”, en la que se potencia que los individuos creen artefactos adaptados a sus necesidades o mejore los ya existentes, utilizando la tecnología.

El objetivo que se persigue es analizar el uso educativo de las impresoras 3D en la educación, conociendo el proceso de impresión 3D, desde el diseño hasta la producción, así como la participación activa del alumnado en el proceso. Esta nueva forma de imprimir y dar forma material a nuestras ideas ya se implementa en diversos campos como la medicina, arquitectura, tecnología y artesanías, previendo un gran futuro en educación, donde esta tecnología está haciendo incursiones dando su huella y brindando la posibilidad de modelar objetos en el aula.

Este tipo de tecnología permite transformar un diseño digital en un objeto físico a través de diferentes metodologías, en función de la forma y el tipo de material utilizado para crear las piezas. De esta manera, es posible tener en pocas horas, herramientas, utensilios de laboratorio, maquetas o prototipos realizados por los propios alumnos.

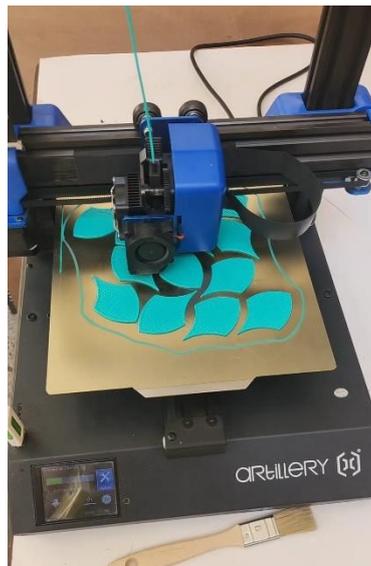
Una impresora 3D es una máquina capaz de realizar réplicas de diseños en 3 dimensiones, creando piezas o maquetas volumétricas a partir de un diseño hecho por ordenador, descargado de internet o recogido a partir de un escáner 3D. Las posibilidades que nos ofrece son enormes, ya que nos permite imprimir diversos objetos o utensilios necesarios en las distintas áreas o materias educativas. Por ejemplo, un docente de educación física, para un evento deportivo que finalice con la entrega de medallas, podría buscar en cualquiera de los repositorios modelos de medallas, descargarlas e imprimirlas.

Por tanto, el verdadero uso educativo de esta herramienta se tiene que centrar en los aprendizajes especificados en las distintas áreas o materias, y no solo en las materias específicas de Ciencia y Tecnología, sino en todas aquellas del currículo de las distintas etapas educativas, donde se evidencie el proceso de impresión, que conlleva principalmente la creación, diseño, laminación e impresión de un objeto contextualizado en su currículo. Es decir, donde el alumnado sea el protagonista de la creación e impresión de un objeto de 3 dimensiones.

En el ejemplo anterior, el docente, podría proponer al alumnado la tarea de crear una medalla, diseñar el modelo de medalla en 2D y 3D, y finalmente, imprimirla. Dicha tarea se presta principalmente para contemplarse de forma interdisciplinar, interviniendo otras materias como Matemáticas y Educación Plástica y Visual.

La impresión 3D contribuye al desarrollo de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, competencia para aprender a aprender, la competencia digital, sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

Está claro, que muchas de las actividades que se puedan realizar, se prestan al trabajo por ámbitos, a desarrollar proyectos interdisciplinarios, STEAM (Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics), aprendizaje basado en problemas, etc, favoreciendo la creatividad, participación y el trabajo cooperativo.



6 – DESARROLLO METODOLÓGICO Y ACTIVIDADES PLANTEADAS.

El alumnado se dividirá en dos grupos de trabajo, rotando entre sí a lo largo de la sesión y el alumnado durante las diferentes sesiones para favorecer la integración y el conocimiento interno del alumnado de sus compañeros.

Por un lado, con un **primer grupo** se trabajará desde un formato matemático y tecnológico las teselaciones en el plano en tres niveles, según la edad del alumnado participante y nociones geométricas que posea.

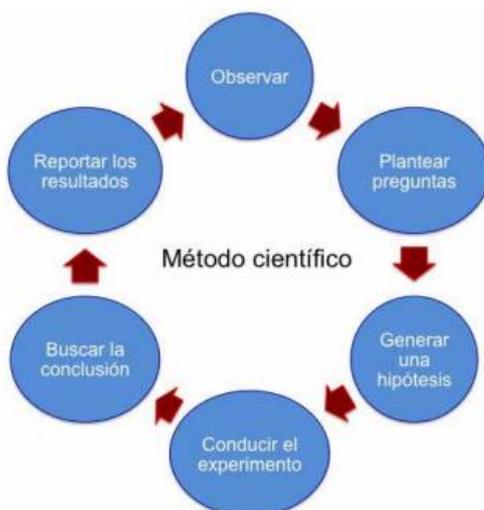
- Nivel inicial: Mosaicos regulares y/o presentes en la naturaleza.
- Nivel medio: Mosaicos históricos (nazaríes y romanos).
- Nivel avanzado: Teselaciones pentagonales. Redes modulares de Escher.

Se elaborarán materiales para formar mosaicos de los tres tipos anteriores mediante ordenadores a través de los programas de Diseño 3D (FreeCad, Blender). El diseño y creación de estos objetos geométricos se realizará con útiles de dibujo (Ed. Plástica) y con diseño 3D, habiendo recibido previamente el alumnado los contenidos matemáticos necesarios. Las piezas se fabricarán mediante impresión en 3D para trabajar de forma manipulativa: ángulos, lados y otras propiedades de los polígonos regulares e irregulares.



Por otro lado, **otro grupo** aprenderá a realizar búsquedas y selección de información específicas, así como crear trabajos y explicaciones sencillas desde el punto de vista histórico y cultural a las cuestiones que están viendo en Matemáticas y Tecnología. Este aprendizaje consistirá en varios pasos:

- Comprensión del método científico aplicado a la Historia y al Arte. Fuentes primarias y secundarias de información en el contexto histórico.
- Planteamiento de problemas y procesos de investigación.
- Búsqueda y selección de información. Uso de diferentes herramientas de búsqueda de información científica.
- Plasmación de esta información mediante herramientas digitales de expresión escrita (Word, Powerpoint, formato Libreoffice...).
- Exposición oral y presentación del conocimiento adquirido en formato divulgativo.



Finalmente, el alumnado visitará distintos Centros de Primaria y Secundaria de la Comarca para exponer su proyecto e iniciarse como divulgadores científicos.

7 – ANEXOS

7.1 – Actividad tipo: La Alhambra



“La Alhambra de Granada es la fuente de inspiración más fértil de todas las que he bebido” M. C. Escher

Paseo geométrico por la Alhambra de Granada



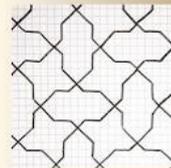
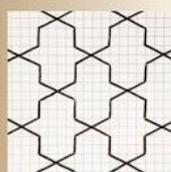
Mosaico “Hueso”



Mosaico “Hojas”



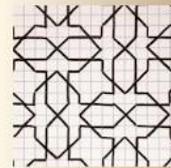
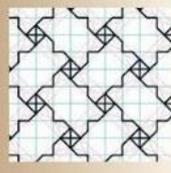
Mosaico salón templado



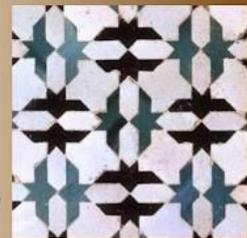
Mosaico en Comares



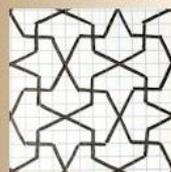
Mosaico en Maxuar



Mosaico “Murciélagos”



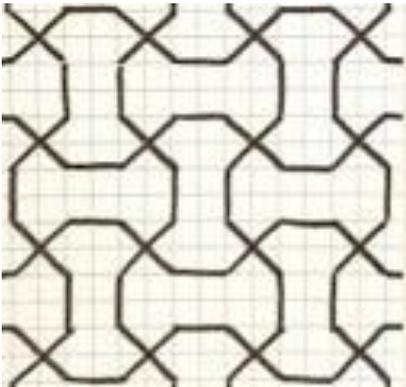
Mosaico “Avión”



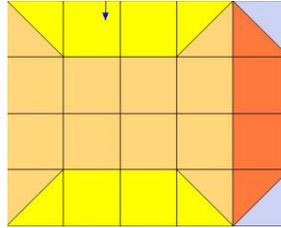
Observa estos patrones de la Alhambra de Granada y reproduce dos de ellos



HUESO NAZARÍ



Observa el hueso nazari. Es un cuadrado al que se le ha quitado un trapecio isósceles a dos de sus lados, y se le han añadido a los dos lados restantes.



Vamos a diseñar con Freecad, cada cuadradito es de un centimetro de lado:

➤ Paleta Sketchers

1º Dibuja un cuadrado de 4 cm de lado con un vértice en el origen (debes de obligar a que los 4 lados sean iguales, paralelos dos a dos, ángulos de 90º)

2º Dibuja un trapecio de 4 cm de base mayor, 2 cm de base menor, altura 1 cm, comprueba que sus ángulos son de 45º y 135º dos a dos.

➤ Paleta Part

3º Extruimos las dos piezas a 4 mm

4º Copiamos el trapecio para tener 4 copias.

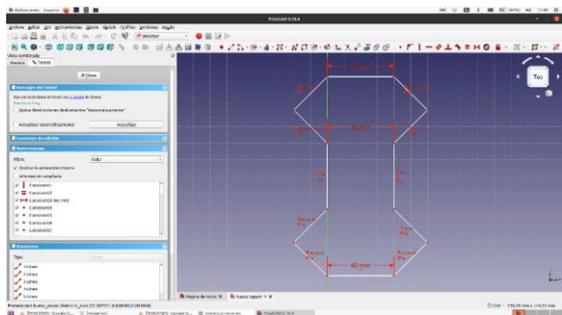
5º Movemos los trapecios como la figura indica.

6º Hacemos dos uniones y dos diferencias.

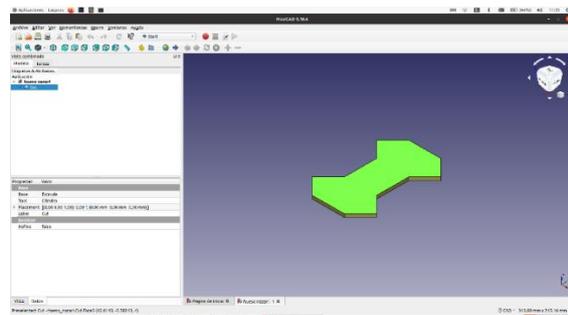
7º Para insertar un agujero para imán o anilla de llavero, inserta un cilindro, dale la altura y radio necesarios, mueve el cilindro hasta la posición deseada, efectúa la diferencia y tendrás tu pieza para imprimir.

8º Para imprimir abre Ultimaker Cura carga el archivo stl que desees imprimir, comprueba su ubicación, tamaño de los ejes x, y, z (escala hasta el tamaño deseado, inserta el número de copias deseadas, gradúa temperatura, velocidad, rellenos, soportes, etc.)

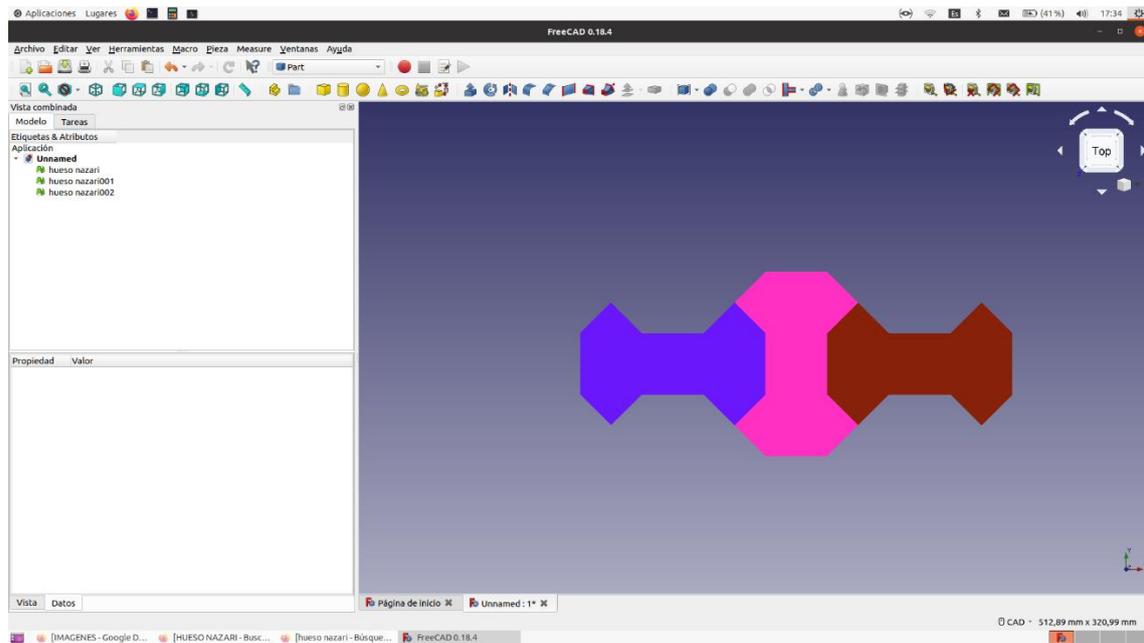
Hueso sketcher



Hueso Part



Formación mosaico



Archivos a los que puedes acceder:

- ✓ [Hueso Freecad](#)
- ✓ [Hueso stl](#) para exportar a Ultimaker Cura
- ✓ [Hueso llavero](#)
- ✓ [Mosaicos con Geogebra](#)



Junta de Andalucía

Consejería de Desarrollo Educativo
y Formación Profesional

I.E.S. Castillo de la Yedra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS - IESCY

El túnel del tiempo

Impresión 3D aplicada al ARte y MaTEmáticas

Autores

María Dolores Fuentes Ortuño^a

Miguel Ángel Tíscar Soria^a

@-mail

mariolafueort787@gmail.com - IESCY

miguelangel.tiscar@gmail.com - IESCY

EXPERIENCIA DOCENTE CON ALUMNADO DE ESO

trabajo divulgativo sobre la teselación del plano

Teselas monoedrales pentagonales



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS - IESCY

Cazorla, febrero de 2023

Índice

Resumen	I
Abstract	III
Introducción	v
1. Marco conceptual	1
1.1. Movimientos en el plano	2
1.2. Teselación regular	3
1.3. Teselación irregular	5
1.4. Tecnología de trabajo	6
Bibliografía	7

Resumen

La necesidad o la inquietud por recubrir el plano mediante motivos (teselas) regulares, acompaña a la humanidad desde la primera piedra construida.

Los motivos geométrico por su regularidad y maleabilidad han ocupado un lugar estelar en este mundo. Las aportaciones del mundo islámico, con su registro en piedra, La Alhambra, son un excelente banco de memoria.

Trabajos como los de Escher, que introducen "la animación.ªrtística de los motivos figuran como uno de los recursos gráficos mas atractivos del siglo XX.

La incursión de la matemática teórica, con teselaciones pentagonales han abierto un nuevo campo de trabajo; tanto a nivel académico como artesanal y decorativo.

Por otro lado, la existencia de software libre como Geogebra ®, nos permite realizar expresiones gráficas de calidad y trabajar de una manera clásica con "regla y compás".

La popularización y "abaratamiento" de las impresoras 3D han abierto nuevos caminos de trabajo investigador, docente y divulgativo, y, por tanto, completado los objetivos de este trabajo.

Palabras clave: Teselas, Movimientos en el plano, Geogebra, Impresión 3D.

Abstract

The need or concern to cover the plane by means of regular motifs (tiles), accompanies humanity from the first stone built.

Geometric motifs for their regularity and malleability have occupied a stellar place in this world. The contributions of the Islamic world, with its stone record, The Alhambra, are an excellent memory bank.

Works such as those of Escher, which introduce artistic animation of motifs appear as one of the most attractive graphic resources of the twentieth century.

The incursion of theoretical mathematics, with pentagonal tessellations have opened a new field of work; both academically and artisanal and decorative.

On the other hand, the existence of free software such as Geogebra[®], allows us to make quality graphic expressions and work in a classic way with "ruler and compass".

The popularization and cheapening of 3D printers have opened new paths of research, teaching and informative work, and, therefore, completed the objectives of this work.

Key words: Tiles, In-plane movements, Geogebra, 3D printing

Introducción

A pocos kilómetros de nuestra ciudad, en la vecina Quesada, se encuentran los restos de una villa romana; la vía de Bruñel en ella, hoy en el Museo Arqueológico Nacional (MAN de Madrid), se encuentran diversos mosaicos. La inquietud o necesidad de recubrir el espacio (plano en este caso) es un denominador común de nuestras civilizaciones. Las técnicas han variado con el tiempo y la tecnología, pero permanecen inalterables en su esencia. El Mundo romano usó y abusó del "cemento de la época" para la colocación y puesta en práctica del "teorema del punto gordo" para su encaje. Más tarde el refinamiento en el estilo y el motivo llegó de manos del mundo árabe. Las limitaciones gráficas que su religión impone (no representar figuras animadas pues el mismo Alá exigirá que el autor las dote de vida y, eso, no parece muy probable) les llevó al mundo de la geometría no solo por lo citado anteriormente sino por un principio teológico: "nadie es el centro del mundo pero todos somos centro de nuestro mundo". A esto se sumaron sus conocimientos de la geometría griega (hoy, algunos autores, los consideran correa de transmisión, sin más, del mundo helenístico a la Europa medieval a través de la escuela de traductores de Toledo). El nivel alcanzado por los artistas nazaríes, sin menospreciar la colaboración sefardita y local, en los mosaicos de la Alhambra aún nos asombra. Hace más de cuatro décadas la UGR, departamentos de Geometría y Álgebra, comenzó el estudio matemático profundo de esas teselaciones. En concreto se encontraron 17 modelos de diferentes teselas en el plano. Estos modelos constituyen la representación plana de los 17 grupos cristalográficos planos estudiados por E.S. Federov (Yevgraf Stepáno-

vich Fiódorov, 1853-1919, Rusia) en 1891. Obviamente, los trabajos nazaríes se centran entre los siglos XIII y XV. Sin embargo, los alicatados de la colina de la Sabika representan la única colección completa de los mismos. Pero ¿qué es una teselación? En palabras llanas, una manera de ocupar todo el plano mediante pequeñas piezas, teselas, que encajan perfectamente entre sí. El número de téseras diferentes debe ser lo más reducido posible incluso, si es posible, del mismo tipo. Es decir, un motivo o patrón se repite mediante giros, traslaciones o simetrías o la composición de los tres movimientos anteriores. El mundo griego, en su búsqueda de la simplicidad, trabajó teselas regulares como una proyección natural de los sólidos pitagóricos. Incluso trabajó la composición de 2 o más motivos digamos clásicos. El paso de los siglos relegó el alicatado a motivos arquitectónicos. En 1936 MC Escher (Maurits Cornelis Escher, 1898-1972, pintor neerlandés cuya obra, aún, supone un reto a la imaginación: M.C. Escher ? The Official Website (mcescher.com)) de turismo por España, recalca en la ciudad granadina y calca varios de esos alicatados. Sin embargo, lo poco afortunado del año sabático elegido, lo lleva a huir del país y sus trabajos son confiscados en la frontera francesa ante el temor a que se tratase de planos secretos. Aún hoy seguimos sin conocer su verdadero paradero. Los trabajos de Escher no escapan al motivo clásico de la teselación del plano pero su talento lo lleva a animar el motivo geométrico, dotándolo de vida en transición. Más recientemente y mucho más académicos son los estudios sobre las teselaciones pentagonales. Siendo el denominado mosaico del Cairo, frecuente en los pavimentos de esta ciudad, su expresión más popular. Y es precisamente ahí donde conducimos la experiencia de estas notas. Teselar el plano con pentágonos como fin y progresión de las relaciones regulares clásicas. Además la posibilidad de manipular las teselas supone el verdadero valor de la experiencia, al convertir a nuestros alumnos en MONITORES y EXPOSITORES de conceptos geométricos elevados y a los PARTICIPANTES en actores activos de la experiencia.

CAPÍTULO 1

Marco conceptual

Nuestros alumnos necesitan familiarizarse con diversos conceptos y herramientas matemáticas, pero debemos evitar, en la medida de lo posible, el uso y abuso del formalismo académico. Una definición con palabras cercanas y/o ideas claras y muy gráficas nos ayuda en varios sentidos: primero, acerca la matemática académica del mundo de las ideas a una herramienta manipulativa y maleable. Y segundo, invita, al menos en algunos, al despertar de la inquietud por avanzar y profundizar en esa idea tan prosaica (inicia el método científico).

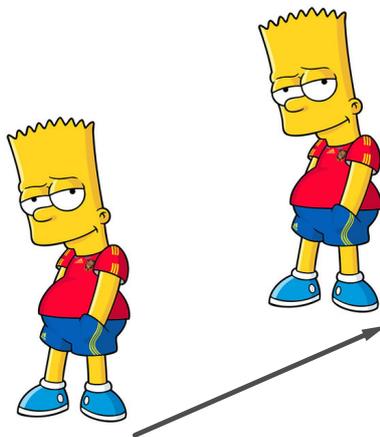
Necesitaremos trabajar con los movimientos en el plano simetrías, traslaciones y giros de forma que su uso no conlleve, necesariamente, su formalización. De lo anterior se deduce la necesidad de un dibujo cuidado y muy exacto; sin desdeñar a nuestros añorados "rotings", la aplicación Geogebra nos aportará nuestros "regla y compás" clásicos.

GeoGebra (www.geogebra.org) es un paquete geométrico, con posibilidades analíticas, gratuito y muy extendido en el mundo educativo. Incluso, el instituto español de Geogebra (institutosgeogebra.es) aporta innumerables recursos educativos.

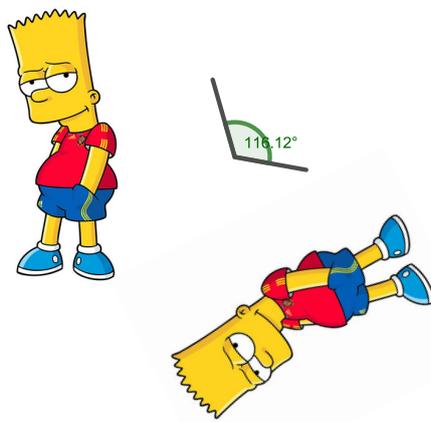
1.1. Movimientos en el plano

Nos interesan los movimientos (transformaciones de elementos del plano en "elementos" del plano) que conserven la forma (los ángulos) y el tamaño (las longitudes)

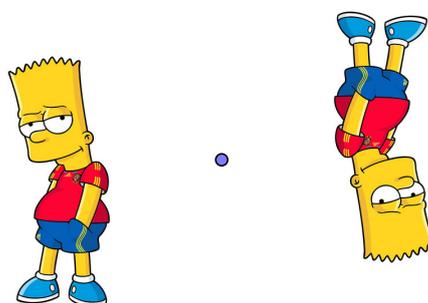
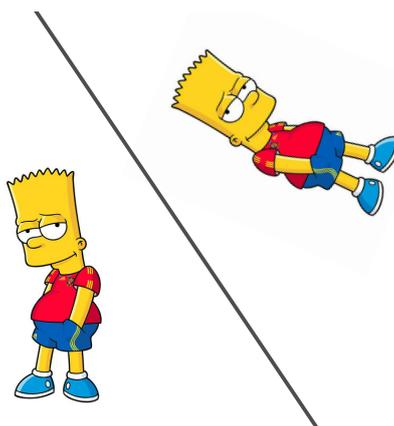
- TRASLACIÓN. Desplazamos la figura en el sentido y magnitud de un vector.



- GIRO. Rotamos la figura, con un punto como centro y bajo un determinado ángulo.

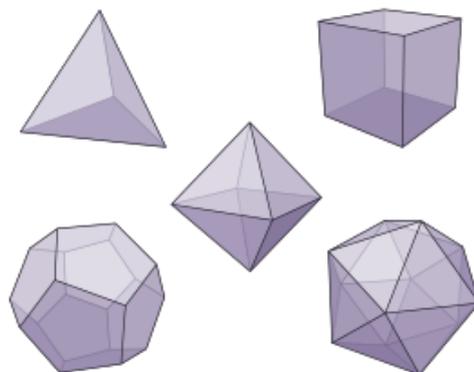


- SIMETRÍA. Reflejamos la figura respecto de una recta a modo de espejo. Si nuestro espejo fuese un punto obtendríamos una ANTISIMETRÍA o SIMETRÍA inversa (simetría más giro de 180°).

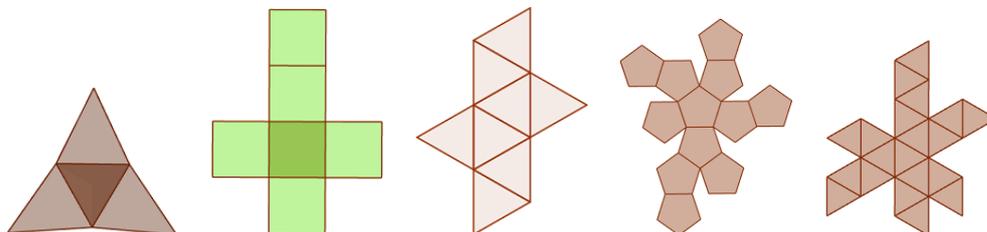


1.2. Teselación regular

Sobre los 12 años los alumnos comienzan a manipular el espacio; en ese cambio, los sólidos pitagóricos o platónicos, representan el centro de esta aproximación, que debería ser absolutamente manipulativa. Tanto sus representaciones espaciales como su desarrollo plano son excelentes actividades para iniciarlos en el método científico.

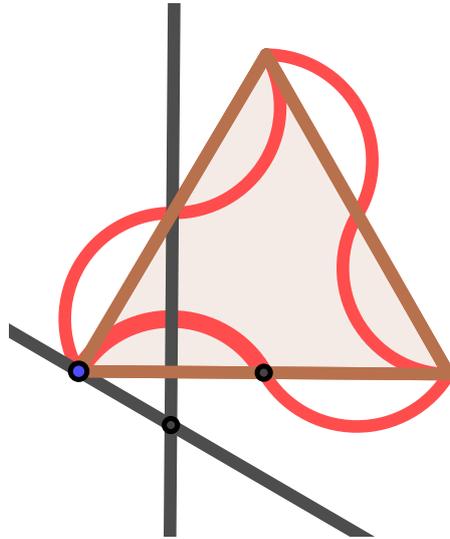


La imposibilidad de levantar el desarrollo genera las primeras teselaciones planas. El uso de polígonos regulares que teselen el plano (sus ángulos - vértices son divisores de 360°) generan los cinco sólidos clásicos.



Un paso hacia adelante consiste en buscar nuevos motivos regulares y en la composición de los existentes. Su manipulación genera los primeros recubrimientos simples basados en giros y traslaciones de las regularidades iniciales. El uso de teselas regulares (polígonos regulares) limitan enormemente la variedad de "mosaicos". Sin embargo, la introducción de la composición de dos o más motivos aumentan el rango.

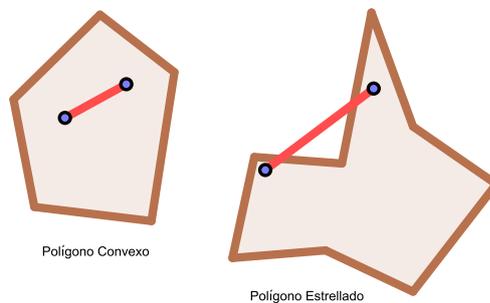
Otra técnica recurrente y base de los alicatados granadinos, consiste en la deformación simétrica o antisimétrica del motivo inicial. Un caso muy explícito es la pajarita nazari.



1.3. Teselación irregular

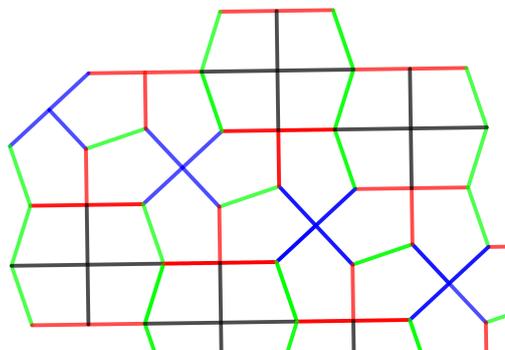
El motivo no es un polígono regular ni composición o transformación de los mismos; ahora se utilizan polígonos, no necesariamente regulares y, aunque no serán objeto de estas notas, ni necesariamente convexos.

En esta nueva óptica, introducen dos tipos de teselaciones generados por formas convexas (cualquier par de puntos interiores del polígono pueden ser unidos por un segmento que permanece dentro del polígono) las más generales, y polígonos no convexas o estrellados que escapan de nuestros objetivos.



Sin embargo, existe un tipo de teselación con pentágonos no regulares (recordemos que su imposibilidad es una de las primeras tareas de trabajo de nuestros

alumnos) cuyo primer motivo ornamental lo encontramos en pavimentos de la ciudad de El Cairo.



Hace algo más de 100 años, multitud de matemáticos y aficionados a los geometría comenzaron a trabajar las teselaciones pentagonales irregulares (especial mención merecen los trabajos de Marprrie Rice o incluso de divulgadores clásicos como Martin Gardner en *Scientific American*). Todos han contribuido a establecer los 15 de modelos de teselación pentagonal con un solo motivo (situación que recibe el nombre de monoexedral)

A finales de 2017, Michaël Rao formuló la conjetura, aún no resuelta, de que precisamente solo existen esos 15 modelos de teselaciones pentagonales monoexedrales convexas.

1.4. Tecnología de trabajo

La aplicación GeoGebra cumple dos objetivos; por un lado, es una herramienta de investigación y creación mientras que por otro, es una plataforma para generar los motivos con la máxima flexibilidad en los mismos (eludiendo generar piezas con ángulos concretos y sí familias de piezas en el rango de las propiedades del modelo)

El motivo se exporta a *.stl para su impresión 3 D. Las "piezas" generadas se montan sobre paneles magnétidos y se distribuyen en diferentes cajas pa-

ra el trabajo manipulativo de los participantes, con la guía-explicación de los monitores.

Bibliografía

- [1] *La geometría matemática de los alicatados:*
<https://www.alhambra-patronato.es/geometria-matematica-alicatados>

- [2] *Teselaciones:*
<https://www.disfrutalasmaticas.com/geometria/teselaciones.html>

- [3] *GeoGebra:* <https://geogebra.org/>

- [4] *R-project:* <https://www.r-project.org/>

- [5] *R-Studio:* <https://rstudio.com/>